

## 知识点 16~18

### 【总 览】

知识点 16~18 是围绕线性方程组的求解展开的. 其中, 知识点 16 介绍齐次线性方程组  $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  的定义, 并讨论齐次线性方程组仅有零解和有无穷个解的充要条件, 以及齐次线性方程组解的性质和一般的求解方法, 在此基础上进一步介绍基础解系和通解的定义, 以及解空间的概念; 知识点 17 介绍非齐次线性方程组  $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  的定义, 并讨论非齐次线性方程组无解、仅有唯一解和有无穷个解的充要条件, 以及非齐次线性方程组解的性质和求解方法, 在此基础上介绍通解的结构; 知识点 18 介绍线性方程组的一些补充概念和结论, 这部分内容在考试中经常出现, 因此将其单独提炼出来供大家学习.

本部分 3 个知识点的框架如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{线性方程组} \end{array} \right\} \begin{cases} A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0} \left\{ \begin{array}{l} \text{有解的条件} \begin{cases} r(A) = n \Rightarrow \text{仅有零解} \\ r(A) = r < n \Rightarrow \text{有 } n-r \text{ 个线性无关解} \end{cases} \\ \text{解的性质: 若 } A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} (\mathbf{x}_1 \text{ 和 } \mathbf{x}_2 \text{ 是两个解}), \text{ 则 } A(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2) = k_1A\mathbf{x}_1 + k_2A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \\ \text{求解方法: 高斯消元法} \\ \text{基础解系和通解} \begin{cases} \text{基础解系: 线性无关且任一解都能由其线性表示} \\ \text{通解: 基础解系的线性组合} \end{cases} \\ \text{解空间} \begin{cases} \text{两个解的和仍是方程组的解} \\ \text{一个解的倍数仍是方程组的解} \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b} \left\{ \begin{array}{l} \text{有解的条件} \begin{cases} r(A) \neq r(A|\mathbf{b}) \Rightarrow \text{无解} \\ r(A) = r(A|\mathbf{b}) = n \Rightarrow \text{仅有唯一解} \\ r(A) = r(A|\mathbf{b}) = r < n \Rightarrow \text{有无穷个解} \end{cases} \\ \text{解的性质} \begin{cases} \text{任意两个解的差是齐次方程组 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 的解} \\ \text{齐次方程组的解与 } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 的解的和仍是 } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 的解} \end{cases} \\ \text{求解方法和通解结构} \end{array} \right. \\ \\ \text{方程组解的理论延伸} \begin{cases} \text{同解方程组} \\ \text{若 } A\mathbf{B} = \mathbf{0}, \text{ 则 } \mathbf{B} \text{ 的列向量组为方程 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 的解} \\ \text{若 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 的解是 } B\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 的解, 则 } r(A) \geq r(B) \end{cases} \end{cases}$$

### 知识点 16 齐次线性方程组

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

称为  $m$  个方程  $n$  个未知量的齐次线性方程组, 其向量形式为:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 其中 } \alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} (i=1, 2, \cdots, n).$$

其矩阵形式为:

$$A_{m \times n} x = 0, \text{ 其中 } A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

注意: 这里  $m$  和  $n$  的大小没有固定关系,  $m$  可以大于或等于或小于  $n$ .

### 1. 齐次线性方程组有解的条件

当  $r(A) = n$  时 (此时向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关), 方程组 (1) 只有零解;

当  $r(A) = r < n$  时 (此时向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关), 方程组 (1) 有非零解, 且线性无关解的个数为  $n-r$ .

特别地, 如果  $A$  为  $n$  阶方阵, 则根据克拉默法则可得:

(1) 齐次线性方程组  $Ax = 0$  只有零解的充要条件是  $|A| \neq 0$ .

(2) 齐次线性方程组  $Ax = 0$  有非零解 (或无数个解) 的充要条件是  $|A| = 0$ .

### 2. 齐次线性方程组解的性质

若  $Ax_1 = 0, Ax_2 = 0$ , 则  $A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 = 0$ , 其中  $k_1, k_2$  是任意常数, 即齐次线性方程组的解的任意线性组合仍是方程组的解.

### 3. 齐次线性方程组的求解方法

**高斯消元法:** 将系数矩阵  $A$  做初等行变换化成行阶梯型矩阵  $B$  (或行标准型矩阵), 由于初等行变换不改变方程组的解, 故  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  的解相同, 只需解出方程组  $Bx = 0$ .

将  $B$  的每行第一个非零元素所在的列对应的未知数视为约束变量, 其余变量为自由变量, 令自由变量为任意常数, 并用其表示约束变量, 即可得到  $Ax = 0$  的通解.

### 4. 齐次线性方程组的基础解系和通解

(1) **基础解系:** 设  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  是方程组  $Ax = 0$  的解, 若满足  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  线性无关, 且方程组  $Ax = 0$  的任何一个解均可由  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  线性表示, 则称  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  为  $Ax = 0$  的基础解系.

(2) **通解:** 设  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 则  $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_{n-r}x_{n-r}$  是方程组  $Ax = 0$  的通解, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  是任意常数 (注意: 这里的  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  可全部取 0).

#### 技巧

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 且  $r(A) = r < n$ , 则  $Ax = 0$  的基础解系一定是满足如下 3 个条件的向量组:

- (1) 该向量组中每个向量都是  $Ax = 0$  的解.
- (2) 该向量组线性无关.
- (3) 该向量组所含的解向量的个数等于  $n-r$ .

记  $S = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  表示齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解的全体, 且集合  $S$  具有如下性质:

(1) 若  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ , 则  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in S$ , 即两个解的和仍是方程组的解;

(2) 若  $\mathbf{x} \in S$ ,  $k \in \mathbf{R}$ , 则  $k\mathbf{x} \in S$ , 即一个解的倍数仍是方程组的解, 则有  $n$  个未知量的齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解向量集合  $S$  构成  $\mathbf{R}^n$  的一个子空间, 称  $S$  是齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解空间.

事实上，解空间是向量空间的一种，因此，解空间也有基和维数，其维数为  $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$  线性无关解的个数.

## 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

称为  $m$  个方程  $n$  个未知量的非齐次线性方程组. 其向量形式为:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \text{ 其中 } \alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

其矩阵形式为:

$$Ax = b, \text{ 其中 } A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

矩阵  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$  称为矩阵  $A$  的**增广矩阵**，简记为  $[A|b]$  或  $[A, b]$  或  $\tilde{A}$ 。

若  $r(A) \neq r(A|b)$  ( $b$  不能由  $Ax=0$  的解线性表示), 则方程组 (2) 无解;

若  $r(AA) = r(A|b) = n$  ( $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  线性相关), 则方程组 (2) 有

唯一解:

若  $r(A) = r(A|b) = r < n$ , 则方程组 (2) 有无穷个解.

技巧: 若  $A$  是  $n$  阶方阵, 则

(1)  $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  有解的充要条件是  $r(A)=r(A|\mathbf{b})$ , 其中当  $|A|\neq 0$  时, 方程组有唯一解  $A^{-1}\mathbf{b}$ ; 当  $|A|=0$  时, 方程组有无数个解.

(2)  $Ax=b$  无解的充要条件是  $r(A) \neq r(A|b)$ .

## 2. 非齐次线性方程组解的性质

设  $\xi_1, \xi_2, \xi$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解,  $x_0$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则

- (1)  $\xi_1 - \xi_2$  是  $Ax = 0$  的解.
- (2)  $kx_0 + \xi$  是  $Ax = b$  的解 ( $k$  为任意常数).

## 3. 非齐次线性方程组的求解方法和通解结构

将增广矩阵  $[A|b]$  做初等行变换化成行阶梯型矩阵 (或行标准型矩阵), 求出对应齐次线性方程组  $Ax = 0$  的通解, 再加上一个  $Ax = b$  的特解即非齐次线性方程组  $Ax = b$  的通解.

☞技巧: 下列结论需要牢记.

- (1) 当  $r(A_{m \times n}) = m$  时, 非齐次线性方程组  $Ax = b$  一定有解.
- (2) 当  $r(A) \neq r(A|b)$  时,  $r(A|b)$  一定等于  $r(A) + 1$ .
- (3) 当  $Ax = b$  仅有唯一解时,  $Ax = 0$  只有零解.
- (4) 当  $Ax = 0$  只有零解时,  $Ax = b$  可能无解, 也可能仅有唯一解.
- (5)  $Ax = b$  有无数解时,  $Ax = 0$  有非零解.
- (6)  $Ax = 0$  有非零解时,  $Ax = b$  可能无解, 也可能有无数解.
- (7) 如果  $A$  是  $n$  阶方阵且  $Ax = 0$  有非零解, 则  $A$  的列向量都是  $A^*x = 0$  的解 ( $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵).

下面给出结论 (7) 的证明.

由于  $A$  是  $n$  阶方阵且  $Ax = 0$  有非零解, 则  $|A| = 0$ . 根据知识点 2 可知,  $\sum_{k=1}^n A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  结合

$|A| = 0$  可得  $A$  的列向量是  $A^*x = 0$  的解.

事实上, 利用知识点 5 中学过的公式  $A^*A = |A|E$  也可以得到相同的结论.

## 知识点 18 方程组解的理论延伸

- (1) 若 2 个方程组  $A_{m \times n}x = 0$  和  $B_{s \times n}x = 0$  有完全相同的解, 则称为同解方程组.

$Ax = 0, Bx = 0$  是同解方程组  $\iff Ax = 0$  的解满足  $Bx = 0$ , 且  $Bx = 0$  的解满足  $Ax = 0 \iff r(A) = r(B)$ ,

且  $Ax = 0$  的解满足  $Bx = 0$  (或  $Bx = 0$  的解满足  $Ax = 0$ )  $\iff r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ .

☞技巧:

- (1) 若  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 则  $Ax = 0$  和  $A^T Ax = 0$  是同解方程组.
- (2)  $r(A) = r(A^T A)$ .
- (3) 由于  $r(A) = r(A^T)$ , 则  $r(A) = r(A^T A) = r(AA^T)$ .

(2) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 若  $AB=0$ , 则  $B$  的列向量组是方程组  $Ax=0$  的一组解.

**证明** 令  $B=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s]$ , 则  $AB=[A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s]$ . 若  $AB=0$ , 则  $A\beta_1=0, A\beta_2=0, \dots, A\beta_s=0$ , 即  $B$  的列向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  为方程组  $Ax=0$  的一组解.

(3) 设方程组  $Ax=0$  的解为  $Bx=0$  的解, 则  $r(A) \geq r(B)$ .

**证明** 设  $r(A)=r$ , 且  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  为齐次线性方程组  $Ax=0$  的基础解系;  $r(B)=s$ , 且  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-s}$  为齐次线性方程组  $Bx=0$  的基础解系. 因为  $Ax=0$  的解为  $Bx=0$  的解, 但  $Bx=0$  的解不一定为  $Ax=0$  的解, 所以  $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$  可由  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-s}$  线性表示, 于是  $n-r \leq n-s$ , 故  $r \geq s$ , 即  $r(A) \geq r(B)$ .

## 【重要题型】

### 题型 1 齐次线性方程组的解

$A_{m \times n}x=0$  有解的条件  $\begin{cases} r(A)=n \Rightarrow \text{仅有零解,} \\ r(A)=r < n \Rightarrow \text{有 } n-r \text{ 个线性无关解.} \end{cases}$

**例 1** 方程组  $\begin{cases} (1-k)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2-k)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3-k)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4-k)x_4 = 0 \end{cases}$  只有零解的充分条件是  $k$  满足\_\_\_\_\_.

**解**  $Ax=0$  只有零解, 则  $r(A)=4$ . 由于  $A$  是四阶方阵, 则  $|A| \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-k & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3-k & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2-k & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -k & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -k \end{vmatrix},$$

当  $k=0$  时,  $|A|=0$ ; 当  $k \neq 0$  时,  $|A| = \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{2}{k} - \frac{3}{k} - \frac{4}{k}\right)k^4 = k^4 - 10k^3 = k^3(k-10)$ . 因此,  $|A| \neq 0$  要求  $k \neq 0$  且  $k \neq 10$ .

**例 2** 已知矩阵  $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$  按列分块,  $A$  的秩  $r(A)=2$ . 若  $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0$ ,  $2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$ , 则齐次线性方程组  $Ax=0$  的通解为\_\_\_\_\_.

**解**  $A$  的秩  $r(A)=2$ , 所以解空间维数为  $4-2=2$ .

因为  $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0$ ,  $2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$ , 可得基础解系  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ , 则齐次线性方程组的

$$\text{通解为 } x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R}).$$

**例 3** 设矩阵  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 若方程组  $Ax = 0$  仅有零解, 则下列结论中一定成立的是 ( ).

A.  $r(A) = m$

B.  $m \geq n$

C.  $m < n$

D. 非齐次线性方程组  $Ax = b$  有唯一解

**解**  $Ax = 0$  说明  $r(A) = n$ , 根据秩的不等式  $r(A) \leq \min(m, n)$ , 则  $m \geq n$ .

D 选项应为非齐次线性方程组  $Ax = b$  有唯一解或无解. 例如  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$  仅有零解, 但是  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

无解.

## 题型 2 非齐次线性方程组的解

$A_{m \times n}x = b$  有解的条件  $\begin{cases} r(A) \neq r(A|b) \Rightarrow \text{无解}, \\ r(A) = r(A|b) = n \Rightarrow \text{仅有唯一解}, \\ r(A) = r(A|b) = r < n \Rightarrow \text{有无穷个解}. \end{cases}$

**例 4** 当  $a, b$  满足什么条件时方程组  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$  有唯一解? 无解? 有无穷个解? 当方程组有无穷个解时, 求出其通解.

**解**  $[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & b \\ 2 & -1 & a & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b-4 \\ 0 & 1 & -2 & b-6 \\ 0 & 0 & a & 3-b \end{array} \right]$ .

因为  $|A| = a$ , 则当  $a \neq 0$  时,  $|A| \neq 0$ ,  $r(A) = r(A|b) = 3$ , 此时方程组有唯一解.

当  $a = 0$ ,  $b \neq 3$  时,  $r(A) \neq r(A|b)$ , 此时方程组无解.

当  $a = 0$ ,  $b = 3$  时,  $r(A) = r(A|b) = 2$ ,  $[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ . 因为  $n - r(A) = 1$ , 所以  $Ax = 0$  只有一个线性无关的解.

取  $x_3$  为自由变量, 则  $Ax = 0$  等价于  $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$  所以  $Ax = 0$  的通解为  $x = k[1, 2, 1]^T$  ( $k$  为任意常数). 再

找到  $Ax = b$  的一个特解为  $[-1, -3, 0]^T$ , 所以原方程组的通解为

$$x = k[1, 2, 1]^T + [-1, -3, 0]^T \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

**例 5** 当  $k$  满足什么条件时方程组  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + kx_2 + 3x_3 = 1, \\ -kx_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$  有唯一解? 无解? 有无穷个解? 当方程组有无穷个解时, 求出其通解.

**解**  $[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 3 & 1 \\ -k & -2 & 0 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 1 & -1 \\ 0 & -2-k & k & 4+k \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & 3+k \end{array} \right]$ .

因为  $|A| = (k+1)(k+2)$ , 当  $k \neq -1$  且  $k \neq -2$  时,  $|A| \neq 0$ ,  $r(A) = r(A|b) = 3$ , 此时方程组有唯一解.

当  $\begin{cases} k+1=0, \\ k+3 \neq 0, \end{cases}$  即  $k = -1$  时,  $r(A) \neq r(A|b)$ , 此时方程组无解.

当  $k = -2$  时,  $[A|b] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ . 取  $x_2$  为自由变量, 可得  $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1, \end{cases}$  故通解

$$\text{为 } \mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

可以发现, 本题和上一题求通解的做法略有区别, 本题直接根据最后的行标准型写出未知量之间满足的表达式, 使计算简化.

### 题型 3 伴随矩阵的齐次线性方程组

如果  $A$  是  $n$  阶方阵且  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解, 则  $A$  的列向量都是  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解.

**例 6** 设  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$  是四阶方阵,  $[1, 0, 1, 0]^T$  是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系, 则  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系可为 ( ).

- A.  $\alpha_1, \alpha_2$       B.  $\alpha_1, \alpha_3$       C.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$       D.  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

**解**  $[1, 0, 1, 0]^T$  是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系, 则  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解, 由  $4 - r(A) = 1$  可得  $r(A) = 3$  且满足  $\alpha_1 + \alpha_3 = \mathbf{0}$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_3$  线性相关.

根据矩阵秩的性质, 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则  $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1 (n \geq 2), \\ 0, & r(A) < n-1 (n \geq 2), \end{cases}$  所以  $r(A^*) = 1$ , 则

$4 - r(A^*) = 3$ , 即  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有 3 个线性无关的解. 又因为  $A$  的列向量都是  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解, 且  $\alpha_1, \alpha_3$  线性相关, 所以  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系可为  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

**例 7** 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ , 求齐次线性方程组  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的通解.

**解** 由于  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 所以  $r(A) = 3$ ,  $|A| = 0$ , 且  $A$  的第 3 列可由第 1 列、第 2

列和第 4 列线性表示.

由于  $r(A^*) = 1$ , 则  $4 - r(A^*) = 3$ ,  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有 3 个线性无关的解. 又由于  $A$  的列向量都是  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解, 则  $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的通解为:

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (c_i \text{ 为任意常数, } i=1, 2, 3).$$

#### 题型 4 向量的线性表示问题

若向量  $\boldsymbol{\beta}$  可由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$  线性表示 (或线性表出), 则方程组  $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$  有解.

**例 8** 设三维向量  $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a+3 \\ a \\ 3(a+1) \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \\ a \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a+3 \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$ , 问:

(1)  $a$  为何值时,  $\boldsymbol{\beta}$  能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  唯一线性表示?

(2)  $a$  为何值时,  $\boldsymbol{\beta}$  能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  线性表示, 但表示不唯一? 试给出所有可能的表示.

(3)  $a$  为何值时,  $\boldsymbol{\beta}$  不能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  线性表示?

**解** 令  $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3(a+1) & a & a+3 \end{bmatrix}$ ,  $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} a+3 & 1 & 2 & | & a \\ a & a-1 & 1 & | & a \\ 3(a+1) & a & a+3 & | & 3 \end{bmatrix}$ .

(1)  $\boldsymbol{\beta}$  能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  唯一线性表示意味着  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$  仅有唯一解, 所以  $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}) = 3$ ,  $\boldsymbol{A}$  可逆, 则  $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ . 由于  $\det(\boldsymbol{A}) = a^2(a-1)$ , 所以当  $a \neq 0$  且  $a \neq 1$  时,  $\boldsymbol{\beta}$  能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  唯一线性表示.

(2) 当  $a=1$  时,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 6 & 1 & 4 & | & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

此时  $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}) < 3$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  线性表示, 但表示不唯一.

主元素列在第 1 列和第 2 列, 因此可将  $x_3$  看作自由变量, 得到  $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 1, \\ x_2 = 2x_3 - 3, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$  即通解

$$\boldsymbol{x} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k \in \mathbf{R}). \text{ 此时 } \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}.$$

(3) 当  $a=0$  时,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & 3 & | & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

由于  $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\beta})$ , 因此  $\boldsymbol{\beta}$  不能由  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$  线性表示.



### 题型 5 齐次（非齐次）线性方程组解的结构

**例 9** 判断下列命题的正确性.

(1) 若齐次线性方程组  $Ax = 0$  只有零解, 则对应的非齐次线性方程组  $Ax = b$  有唯一解. ( )

**解** 错误 参考例 3 的 D 选项.

(2) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 其秩为  $r$ , 则  $Ax = b$  的线性无关的解的个数不超过  $n - r$  个. ( )

**解** 错误. 应该为超过  $n - r + 1$  个 (详细证明见知识点 16~18 精选习题的第 15 题).

举个反例:  $A = [1, 1]$ ,  $b = [1]$ , 则  $x_1 + x_2 = 1$  这个方程有 2 个线性无关的解  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 但是  $n - r =$

$2 - 1 = 1$ , 所以错误.

(3) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 当  $r(A) = m$  时, 非齐次线性方程组  $Ax = b$  必有解. ( )

**解** 正确.  $m = r(A) \leq r(A|b) \leq m$ , 则  $r(A) = r(A|b)$ ,  $Ax = b$  必有解.

(4) 若非齐次线性方程组  $Ax = b$  有两个不同的解, 则  $Ax = 0$  有非零解. ( )

**解** 正确. 设  $\xi_1, \xi_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 则  $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$  是  $Ax = 0$  的解.

**例 10** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $Ax = 0$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  对应的齐次线性方程组, 那么 ( ).

- A. 若  $Ax = 0$  仅有零解, 则  $Ax = b$  有唯一解      B. 若  $Ax = 0$  有非零解, 则  $Ax = b$  有无穷个解  
C. 若  $Ax = b$  有唯一解, 则  $Ax = 0$  可能有非零解      D. 若  $Ax = b$  有无穷个解, 则  $Ax = 0$  有非零解

**解** 根据下面 4 个结论, 选择 D.

(1) 当  $Ax = b$  仅有唯一解时,  $Ax = 0$  只有零解 (C 错误).

(2) 当  $Ax = 0$  只有零解时,  $Ax = b$  可能无解, 也可能仅有唯一解 (A 错误).

(3) 当  $Ax = b$  有无数个解时,  $Ax = 0$  有非零解 (D 正确).

(4) 当  $Ax = 0$  有非零解时,  $Ax = b$  可能无解, 也可能有无穷个解 (B 错误).

### 题型 6 求公共解

**例 11** 设线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$  与方程  $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$  有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解.

**解** 联立题干中的方程组与方程得  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1, \end{cases}$  对新方程组的增广矩阵  $[A|b]$  施以初等行变换, 即

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array} \right] = B.$$

因为方程组有解, 所以  $a=1$  或  $a=2$ . 当  $a=1$  时,  $B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ , 公共解  $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (k \in \mathbf{R})$ ; 当  $a=2$  时

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ 公共解 } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

## 【精选习题】

### 基础篇

1. 设  $A$  是  $s \times n$  矩阵, 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  有非零解的充要条件是 ( ).  
 A.  $A$  的行向量组线性无关  
 B.  $A$  的列向量组线性无关  
 C.  $A$  的行向量组线性相关  
 D.  $A$  的列向量组线性相关
2. 设四元非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的系数矩阵的秩为 2,  $X_1, X_2$  是  $AX = \beta$  的 2 个解,  $\alpha_1, \alpha_2$  是导出方程组  $AX = 0$  的线性无关的解, 则  $AX = \beta$  的通解为 ( ).  
 A.  $\frac{1}{2}(X_1 + X_2) + k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2\alpha_2$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数  
 B.  $\frac{1}{2}(X_1 - X_2) + k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2\alpha_2$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数  
 C.  $X_1 + k_1(X_1 - X_2) + k_2\alpha_2$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数  
 D.  $X_1 + k_1(X_1 + X_2) + k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2$ , 其中  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数
3. 设  $m \times n$  实矩阵  $A$  的秩  $r(A) = n-1$ , 且  $\xi_1, \xi_2$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的 2 个不同解, 若去掉  $A$  的第 1 行得到  $B$ , 则齐次方程组  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$  的通解为 ( ).  
 A.  $k\xi_1, k \in \mathbf{R}$   
 B.  $kB\xi_2, k \in \mathbf{R}$   
 C.  $k(A\xi_1 - B\xi_2), k \in \mathbf{R}$   
 D.  $k(\xi_1 - \xi_2), k \in \mathbf{R}$
4. 设  $n$  元齐次线性方程组  $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ , 则它的基础解系中所含向量的个数为 \_\_\_\_\_.
5. 记  $5 \times 4$  矩阵  $A$  的列向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , 设矩阵  $A$  的秩为 3 且各行元素和为 0, 又已知向量  $\beta = \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3$ , 那么非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的通解为 \_\_\_\_\_.
6. 设  $A$  为四阶方阵, 且  $r(A) = 3$ , 则齐次线性方程组  $A^*x = 0$  的基础解系中所含解向量的个数为 \_\_\_\_\_.
7.  $\lambda$  取何值时非齐次线性方程组  $\begin{cases} -x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ -5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$  无解? 有唯一解? 有无穷个解? 并写出有无穷个

解时的通解.

8.  $\lambda$  取何值时线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$  和  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = \lambda \end{cases}$  有公共解, 并求出所有

公共解.

9. 设  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a+2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ a+8 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ b+3 \\ 5 \end{bmatrix}$ , 问:

- (1)  $a, b$  为何值时  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示?
  - (2)  $a, b$  为何值时  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  唯一线性表示?
  - (3)  $a, b$  为何值时  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示, 但不唯一?
10.  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 若方程组  $Ax = b$  有唯一解, 证明  $A^T A$  是可逆矩阵, 并求此时方程组的唯一解.

### 提高篇

11. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{bmatrix}$ ,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  互不相等, 则下列选项中正确的是 ( ).

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| A. 方程组 $Ax = 0$ 只有零解    | B. 方程组 $AA^T x = 0$ 只有零解 |
| C. 方程组 $A^T x = 0$ 有非零解 | D. 方程组 $AA^T x = 0$ 有非零解 |

12. 设  $A$  是四阶方阵,  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  是线性方程组  $Ax = b$  的 3 个解, 证明:  $A^* = 0$ .

13. 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 证明: 齐次线性方程组  $A^2 X = 0$  与  $AX = 0$  同解.

14. 已知矩阵  $A$  的秩为  $r$ ,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  为非齐次线性方程组  $Ax = \beta (\beta \neq 0)$  的  $n-r+1$  个线性无关的解向量. 证明:

- (1) 对任意的  $i \in [1, r]$ ,  $\alpha_{n-i} - \alpha_0$  是导出方程组  $Ax = 0$  的非零解.
- (2)  $\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_0, \dots, \alpha_{n-r} - \alpha_0$  是导出方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系.

15. 设  $\beta$  为非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一个解, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是  $Ax = b$  的导出方程组  $Ax = 0$  的基础解系. 证明:

- (1)  $\beta, \alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \dots, \alpha_s + \beta$  是  $Ax = b$  的  $s+1$  个线性无关的解.
- (2)  $Ax = b$  线性无关的解的个数不可能超过  $s+1 = n - r(A) + 1$  个.